Автоматика

Лекция 3: Динамические (астатические) звенья

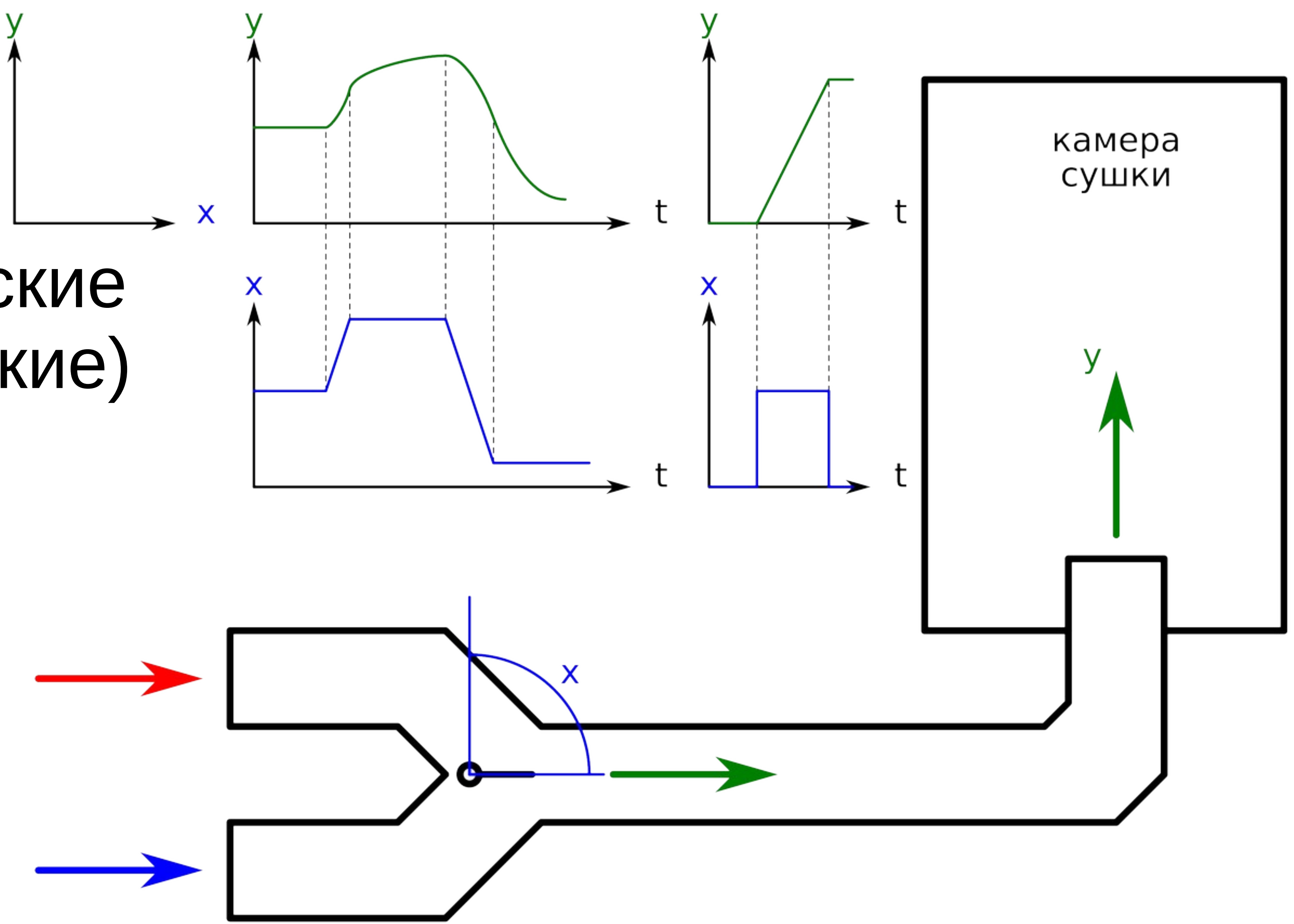
В предыдущей лекции

- История развития автоматики в истории человечества
- Польза функциональных схем систем автоматики
- Роли звеньев в системах управления
- Виды статических звеньев: линейные, нелинейные и дискретные

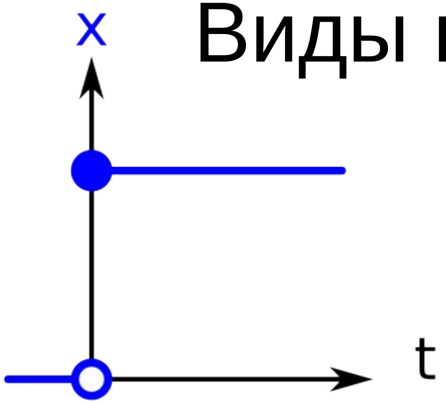
О чем эта лекция?

- Почему динамические звенья нельзя описать традиционными функциями
- Какие входные воздействия бывают и какие из них — типичные
- Переходная, весовая и передаточная функции системы
- Функции элемента подвески
- Типовые передаточные функции астатических звеньев

Динамические (астатические) звенья



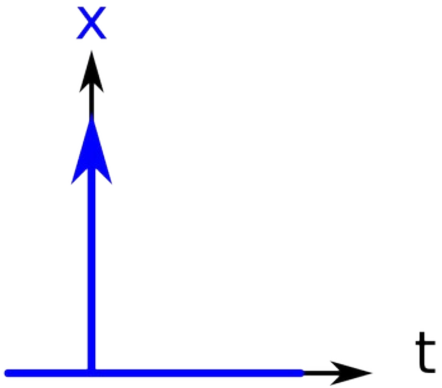
Виды входных воздействий



- Единичное ступенчатое воздействие (функция Хевисайда)

$$\Theta(x)=\begin{cases} x=0 & \text{при}\ t<0 \\ x=1 & \text{при}\ t\geqslant 0 \end{cases}$$

- Единичное импульсное воздействие (дельта-функция)



$$\delta(x)=\begin{cases} x=0 & \text{при}\ t\neq 0 \\ x=\infty & \text{при}\ t=0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\partial t=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\partial t=\Theta(x)$$

- Периодическое воздействие

Преобразование Лапласа

- интегральное преобразование, связывающее функцию F(s) комплексного переменного (изображение) с функцией f(x) вещественного переменного (оригинал).

$$F(p) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{(-pt)} f(t) \partial t$$

$$\sigma = \Re\, p$$

$$p = \sigma + i\,\omega$$

$$\omega = \Im\, p$$

- операциям над оригиналами соответствуют более простые операции над их изображениями

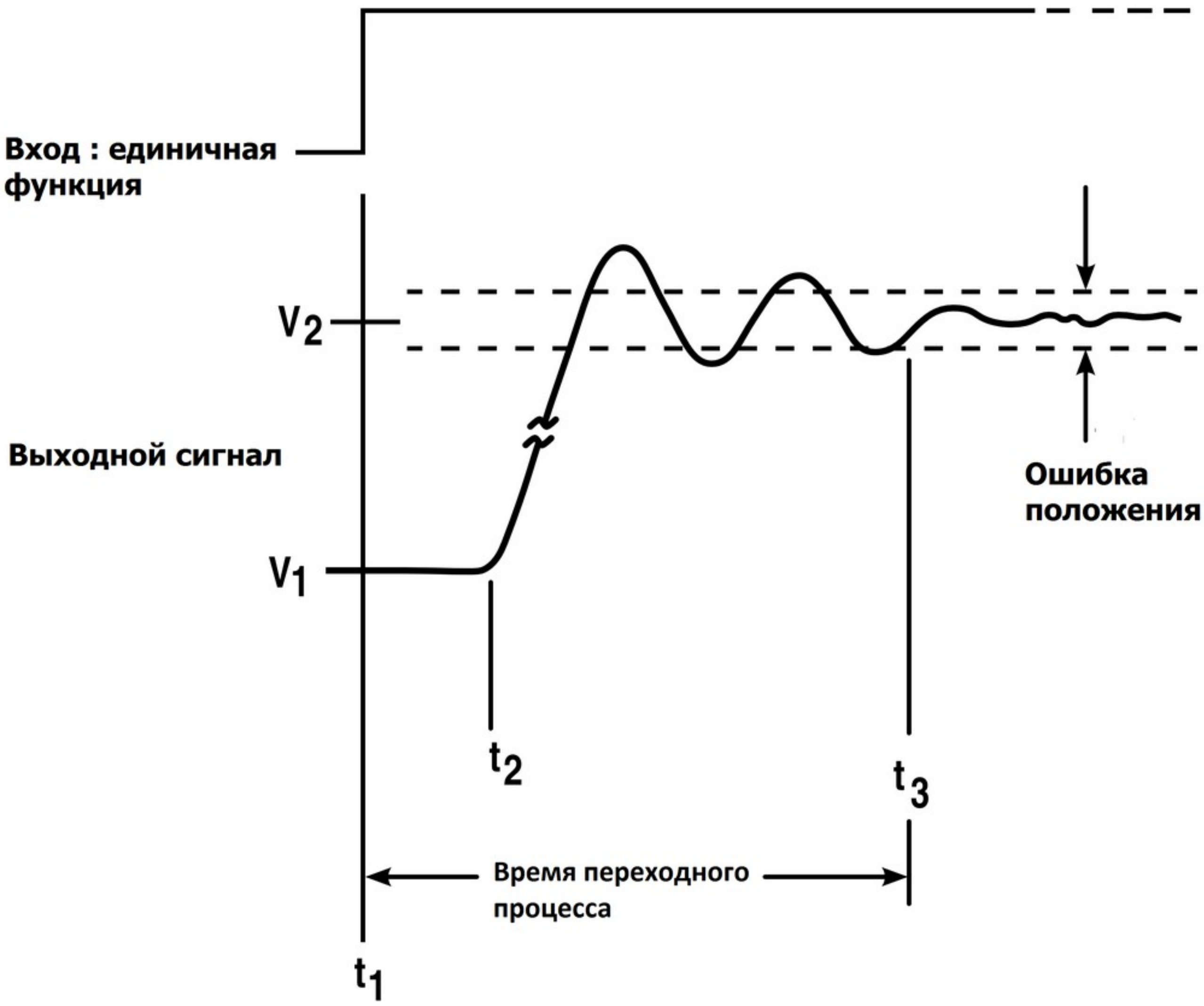
Свойства преобразования Лапласа

- Дифференцирование (с нулевыми начальными условиями)

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}\right\} = p^n \cdot F(p)$$

Переходная функция

- Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие
- Устойчивость системы, время переходного процесса, величина перерегулирования, статическая ошибка

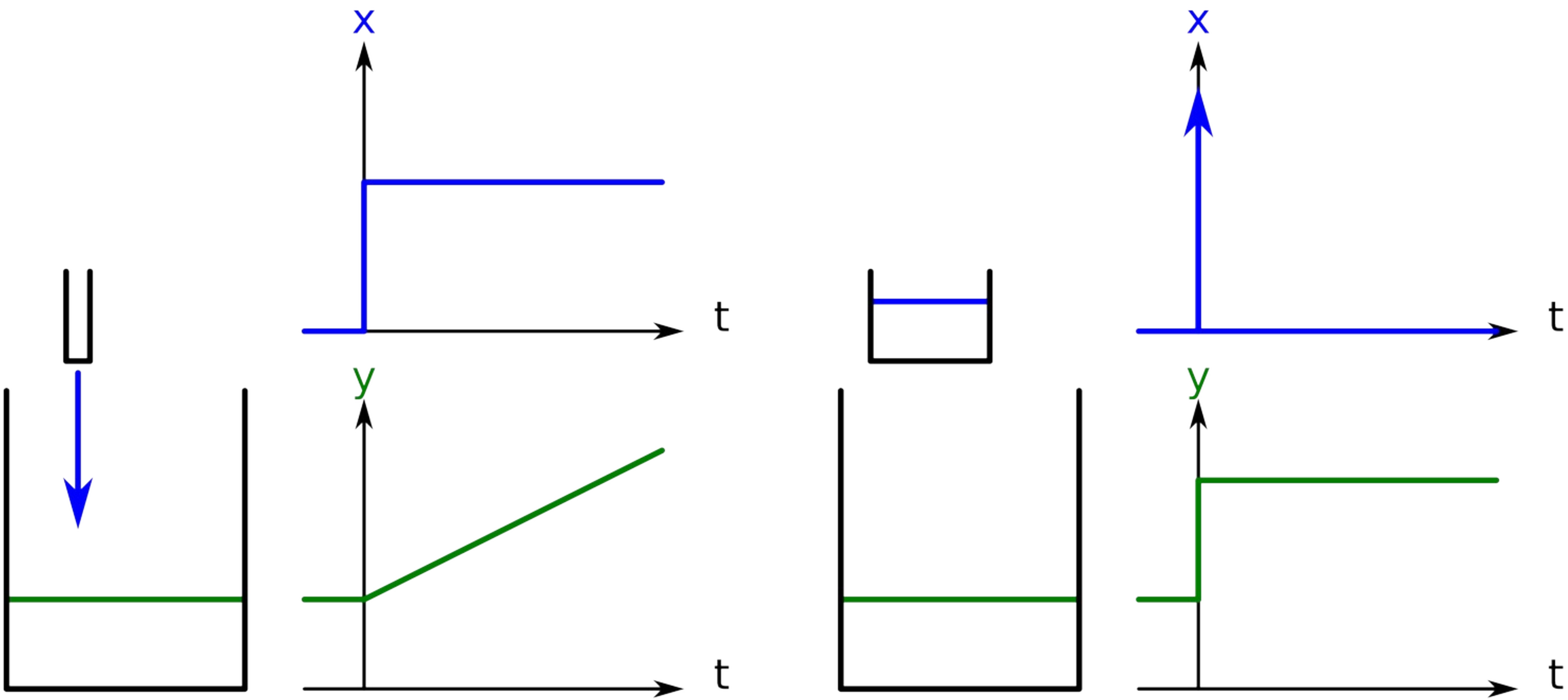


Весовая функция

- Реакция на единичное импульсное воздействие
- Является производной для функции переходного процесса

$$w(t)=\frac{\partial h(t)}{\partial t}$$

Практический пример



Передаточная функция

- Передаточная функция непрерывной системы представляет собой отношение преобразования Лапласа выходного сигнала к преобразованию Лапласа входного сигнала при нулевых начальных условиях

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

Дифференциальные уравнения

- Дифференциальное уравнение

$$T_n \frac{\partial^n y(t)}{\partial t^n} + \ldots + T_1 \frac{\partial y(t)}{\partial t} + y(t) = k\, x(t)$$

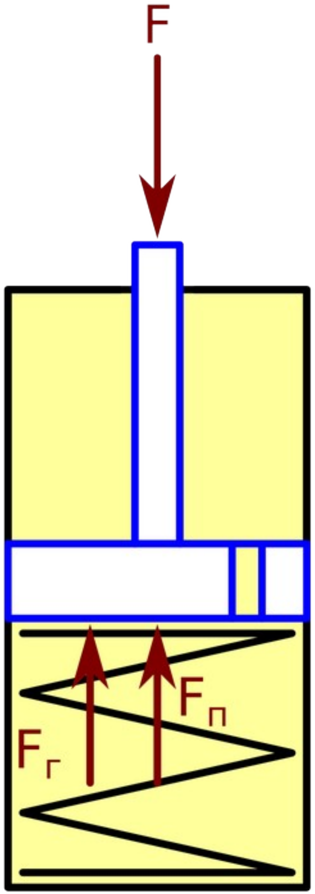
- Преобразование с помощью оператора Лапласа

$$T_n p^n Y(p) + \ldots + T_1 p Y(p) + Y(p) = k\, X(p)$$

- Передаточная функция

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{T_n p^n + \ldots + T_1 p + 1}$$

Элемент подвески



- Сумма сил

$$F = F_п + F_г$$

- Пружина

$$F_п = K_п h$$

- Гидравлика (Дарси-Вейсбаха)

$$P = \zeta \frac{v^2}{2g} \qquad F = K_г v \qquad F = K_г \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$P = F v \qquad v = \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$F = K_п h + K_г \frac{\partial h}{\partial t}$$

Передаточная функция (1/2)

- Дифференциальное уравнение

$$F(t)=K_п h(t)+K_г \frac{\partial h(t)}{\partial t}$$

$$K_г \frac{\partial h(t)}{\partial t}+K_п h(t)=F(t)$$

- Разделить на Кп

$$\frac{K_г}{K_п}\frac{\partial h(t)}{\partial t}+h(t)=\frac{1}{K_п}F(t)$$

Передаточная функция (2/2)

- Замена $x(t)=F(t) \qquad y(t)=h(t)$

$$\frac{K_г}{K_п}=T \qquad \frac{1}{K_п}=K$$

$$\frac{K_п}{K_г}y(t)+\frac{\partial y(t)}{\partial t}=\frac{1}{K_г}x(t) \qquad T\frac{\partial y(t)}{\partial t}+y(t)=K\,x(t)$$

- Преобразование в изображения

$$\mathscr{L}\{x(t)\}=X(p)$$
$$\mathscr{L}\{y(t)\}=Y(p)$$
$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial y(t)}{\partial t}\right\}=pY(p)$$

$$T\,pY(p)+Y(p)=K\,X(p)$$

- Передаточная функция

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{K}{Tp+1}$$

Типовые передаточные функции

- Пропорциональное звено (усилитель)

$$y = k\,x \qquad\qquad W(p) = k$$

- Интегрирующее звено (накопительный бак)

$$y = \int_0^{\infty} x(t)\,\partial t \qquad\qquad W(p) = \frac{k}{p}$$

- Дифференцирующее звено

$$y = T\,\frac{\partial x(t)}{\partial t} \qquad\qquad W(p) = T\,p$$

Типовые передаточные функции

- Апериодическое звено первого порядка (нагрев)

$$T\frac{\partial y(t)}{\partial t}+y=k\,x \qquad W(p)=\frac{k}{T\,p+1}$$

- Апериодическое звено второго порядка (устойчивое колебательное и неколебательное)

$$T_2^2\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2}+T_1\frac{\partial y(t)}{\partial t}+y=k\,x \qquad W(p)=\frac{k}{T_2^2\,p^2+T_1\,p+1}$$

- Звено с запаздыванием

$$y(t)=x(t+\tau) \qquad W(p)=e^{-\tau p}$$

Заключение

- Сущность динамических звеньев — в их зависимости от времени
- На звено можно воздействовать множеством способов, но типичные из них: ступенчатое и импульсное
- Преобразование Лапласа позволяет упростить процесс расчета сложных многозвенных систем за счет перевода уравнений из класса дифференциальных в класс алгебраических
- Существует множество реальных звеньев, но все они могут быть условно разделены на ряд типичных классов